

Wiederholung



Was waren nochmal Primzahlen?

- welche Eigenschaften haben sie?
- wie erkenne ich sie?

Wiederholung

LB §. 20 Nr. 7



7  Richtig oder falsch? Begründe.

- a) Es gibt Primzahlen, die auf 0 enden.
- b) Es gibt nur eine Primzahl, deren letzte Ziffer eine 5 ist.
- c) Es gibt keine geraden Primzahlen.

Wiederholung



Zur Erinnerung: Was ist eine Primzahl?

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat:
1 und sich selbst.

Zum Beispiel:

7 → Teiler: 1 und 7 → Primzahl

11 → Teiler: 1 und 11 → Primzahl

12 → Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 12 → keine Primzahl

Wiederholung

LB §. 20 Nr. 7



a) Es gibt Primzahlen, die auf 0 enden.

✗ Falsch

Zahlen, die auf 0 enden, sind immer durch 10 teilbar.

Zum Beispiel:

$$20 : 10 = 2$$

Damit hat 20 neben 1 und 20 noch weitere Teiler. Sie kann also keine Primzahl sein.

Wiederholung

LB S. 20 Nr. 7



b) Es gibt nur eine Primzahl, deren letzte Ziffer eine 5 ist.

✓ Richtig

Die Zahl 5 ist eine Primzahl.

Alle anderen Zahlen, die auf 5 enden, sind durch 5 teilbar und größer als 5.

Zum Beispiel:

$$15 : 5 = 3$$

15 hat also neben 1 und 15 noch die Teiler 3 und 5 → keine Primzahl.

Das gilt auch für 25, 35, 45, 55 usw.

Wiederholung

LB S. 20 Nr. 7



c) Es gibt keine geraden Primzahlen.

✗ Falsch

Es gibt eine gerade Primzahl: die 2.

Die 2 hat genau zwei Teiler:

1 und 2

Deshalb ist sie eine Primzahl.

Alle anderen geraden Zahlen sind durch 2 teilbar und haben dadurch mehr als zwei Teiler.

Zum Beispiel:

$$8 : 2 = 4$$

→ 8 hat die Teiler 1, 2, 4 und 8 → keine Primzahl.

Primfaktorzerlegung

30 =



Primfaktorzerlegung



$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 15 \\ &= \underline{2 \cdot 3 \cdot 5} \quad \checkmark \end{aligned}$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

→ Primzahlen

Primfaktorzerlegung



Ich kann alle Zahlen multiplikativ in Primfaktoren zerlegen. Das heißt, dass ich zu **jeder Zahl immer Malaufgaben** finde, die nur aus **Primzahlen** bestehen.

Zum Beispiel:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Primfaktorzerlegung

$$45 =$$



Primfaktorzerlegung



$$\begin{aligned} 45 &= 5 \cdot \underline{9} \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= \underline{3^2 \cdot 5} \end{aligned}$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 → Primzahlen

Primfaktorzerlegung

$$456 =$$



Primfaktorzerlegung



$$456 = 2 \cdot 228$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 114$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 57$$

Quersumme
 $5 + 7 = 12$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$$

$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 19$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 → Primzahlen

Primfaktorzerlegung

$$2940 =$$



Primfaktorzerlegung



$$2940 = 2 \cdot 1470$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 735$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 147$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 49$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$= \underline{\underline{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}}$$

Quersumme:

$$1 + 4 + 7 = 12$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 → Primzahlen

Primfaktorzerlegung üben



Pflichtaufgaben:

Bearbeite die Arbeitsblätter:

- Primfaktorzerlegung mit Zahlen bis 100
- Primfaktorzerlegung mit Zahlen bis 500 (Ü1)

Zusatzaufgaben:

- Primfaktorzerlegung mit Zahlen bis 500 (Ü2)
- Primfaktorzerlegung mit Zahlen bis 500 (Ü3)

ggT - größter gemeinsamer Teiler



Der größte gemeinsame Teiler (ggT) wird aus mindestens 2 Zahlen bestimmt. Wie der Name schon sagt, ist das ggT der **Teiler**, den die zu vergleichenden Zahlen **gemeinsam** haben und dazu noch der **größte** davon ist.

Zum Beispiel:

$$T_{24}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$T_{36}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Die 12 ist der größte, gemeinsame Teiler.

$$\text{ggT}(24, 36)=12$$

ggT durch Primfaktorzerlegung



Man kann das ggT durch Primfaktorzerlegungen bestimmen. Dafür guckt man, welche **Primfaktoren** in den Zerlegungen bei **allen Zahlen vorkommen** und **multipliziert** diese. Das hilft vor allem bei großen Zahlen.

Zum Beispiel:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Ich rechne:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{ggT}(24, 36) = 12$$

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT)



Pflichtaufgaben:



1. Übernimm einen eigenen Merksatz.
(Vergleich der Mengen / Primfaktorzerlegung)
 2. LB S. 22
- * Nr. 1, 2, 4a)
- ** Nr. 3, 4
- *** Nr. 4, 5

Methode: Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT)



1 Bestimme mit einer Methode deiner Wahl den größten gemeinsamen Teiler.

- a) ggT (12, 20) b) ggT (30, 140) c) ggT (84, 126) d) ggT (112, 144)

2 Der größte gemeinsame Teiler von zwei Zahlen ist 6. Gib drei Möglichkeiten für die beiden Zahlen an und erkläre, wie du vorgegangen bist.

3 Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist, heißen **teilerfremd**.

Sind die Zahlen teilerfremd?

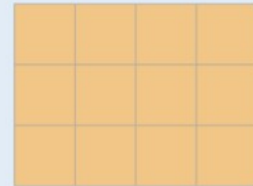
- a) 10 und 21 b) 16 und 45 c) 48 und 52 d) 55 und 84 e) 30 und 147

4 Gib den größten gemeinsamen Teiler an.

- a) ggT (12, 36, 100) b) ggT (40, 64, 104) c) ggT (60, 150, 180)

5 Thea hat eine Holzplatte, die 52 cm breit und 76 cm lang ist. Sie möchte diese mit möglichst großen, quadratischen Mosaiksteinen vollständig bekleben.

- a) Welche Seitenlänge hat solch ein Mosaikstein?
b) Wie viele dieser Steine passen auf die Holzplatte?



Lösungsvorschlag



Methode: Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT)

Seite 22

1

a) 4 b) 10 c) 42 d) 16

2

z.B. 12 ($= 2 \cdot 2 \cdot 3$) und 42 ($= 2 \cdot 3 \cdot 7$); 30 ($= 2 \cdot 3 \cdot 5$) und 66 ($= 2 \cdot 3 \cdot 11$); 18 ($= 2 \cdot 3 \cdot 3$) und 30 ($= 2 \cdot 3 \cdot 5$)

3

a) ja b) ja c) nein; ggT = 4 d) ja e) nein; ggT = 3

4

a) 4 b) 8 c) 30

5

a) 4 cm b) 247 Steine

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.
- Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache.

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.
- Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache.
- Schreibe die Vielfachenmenge von 12 und 15 auf (am besten die ersten 10).

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.
- Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache.
- Schreibe die Vielfachenmenge von 12 und 15 auf (am besten die ersten 10).
- Mache mit dem "g" weiter → steht für gemeinsames. Markiere alle gemeinsamen Vielfache

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.
- Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache.
- Schreibe die Vielfachenmenge von 12 und 15 auf (am besten die ersten 10).
- Mache mit dem "g" weiter → steht für gemeinsames. Markiere alle gemeinsamen Vielfache
- Nun fehlt noch das "k" → steht für kleinstes. Also die kleinste gemeinsame Zahl der Vielfachenmenge.

Was bedeutet kgV?



- Wofür könnte kgV stehen (denk an das ggT, dann kommst du bestimmt drauf, was kgV heißt)
- Zerlege dir die Wörter des kgV, wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen.
- Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache.
- Schreibe die Vielfachenmenge von 12 und 15 auf (am besten die ersten 10).
- Mache mit dem "g" weiter → steht für gemeinsames. Markiere alle gemeinsamen Vielfache
- Nun fehlt noch das "k" → steht für kleinstes. Also die kleinste gemeinsame Zahl der Vielfachenmenge.
- Das $\text{kgV}(12,15)=$

Was bedeutet kgV?



1.) **k** (kleinstes) **g** (gemeinsames) **V** (Vielfaches)

2.) wir wollen das kgV von 12 und 15 bestimmen. Beginne mit dem "V" → steht für Vielfache:

Schreibe die Vielfachenmenge von 12 und 15 auf (am besten die ersten 10):

$$V_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, \dots\}$$

$$V_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, \dots\}$$

3.) Mache mit dem "g" weiter → steht für gemeinsames. Markiere alle gemeinsamen Vielfache:

$$V_{12} = \{12, 24, 36, 48, \mathbf{60}, 72, 84, 96, 108, \mathbf{120}, \dots\}$$

$$V_{15} = \{15, 30, 45, \mathbf{60}, 75, 90, 105, \mathbf{120}, 135, 150, \dots\}$$

4.) Nun fehlt noch das "k" → steht für kleinstes.

Also die kleinste gemeinsame Zahl der Vielfachenmenge.

Das **kgV (12,15) = 60**

kgV - kleinste gemeinsame Vielfache



Der kleinste gemeinsame Vielfache von (mindestens) 2 Zahlen ist die Zahl, die bei beiden Vielfachenmengen vorkommt und die kleinste ist.

Zum Beispiel:

$$V_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$$

$$V_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$$

Es gibt unendlich viele gemeinsame Vielfache, aber nur ein kleinstes.

$$\text{kgV}(4, 6) = 12$$

kgV durch Primfaktorzerlegung



Man kann das kgV durch Primfaktorzerlegungen bestimmen. Dafür guckt man, welche Primfaktoren bei **allen Zahlen vorkommen** und berechnet die **höchste** vorkommende **Potenz/Anzahl aller Primfaktoren**. Das bietet sich v. A. bei großen Zahlen an.

Zum Beispiel:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1$$

Es kommen die 2 und die 3 vor. Die höchste Potenz der 2 ist 2 ($2 \cdot 2$) und der 3 ist 1 (3).

Ich rechne: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$$\text{kgV}(4, 6) = 12$$

anderes Beispiel

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

$$2700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$\text{kgV}(360, 2700) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 5400$$

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT)



Pflichtaufgaben:

1. Übernimm einen eigenen Merksatz.
(Vergleich der Mengen / Primfaktorzerlegung)

2. LB S. 23

* Nr. 1, 2

** Nr. 1, 2, 3

*** Nr. 2, 3, 4

Methode: Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)



1 Bestimme mit einer Methode deiner Wahl das kleinste gemeinsame Vielfache.

- a) kgV (6, 9) b) kgV (9, 12) c) kgV (6, 8) d) kgV (14, 21) e) kgV (18, 60)

2 Nenne zwei Zahlen mit folgendem kgV:

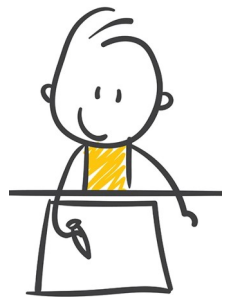
- a) 10 b) 15 c) 12 d) 20 e) 42 f) 36 g) 60 h) 100

3 Die Gangster Al und Capone tauchen regelmäßig in der Kneipe „Black Sheep“ auf. Al kommt jeden dritten, Capone jeden fünften Tag. An jedem wievielten Tag treffen sie sich?

4 Prüfe mit Hilfe von Beispielen.

- a) Der größte gemeinsame Teiler von zwei Primzahlen ist immer 1.
- b) Zwei gerade Zahlen sind nie teilerfremd.
- c) Zwei ungerade Zahlen sind immer teilerfremd.
- d) Der größte gemeinsame Teiler von einer Primzahl und einem Vielfachen der Primzahl ist immer 1.
- e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei teilerfremden Zahlen ist immer das Produkt der beiden Zahlen.

Lösungsvorschlag



Method: Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)

Seite 23

1

- a) 18 b) 36 c) 24 d) 42 e) 180

2

- a) z.B. 2 und 5 b) z.B. 3 und 5 c) z.B. 6 und 4 d) z.B. 4 und 10
e) z.B. 3 und 14 f) z.B. 4 und 9 g) z.B. 4 und 30 h) z.B. 20 und 25

3

$\text{kgV}(3, 5) = 15$ Sie treffen sich am 15. Tag das nächste Mal.

4

- a) z.B. $\text{ggT}(7, 11) = 1$; $\text{ggT}(2, 13) = 1$
b) z.B. $\text{ggT}(4, 6) = 2$; $\text{ggT}(16, 24) = 8$
Zwei gerade Zahlen lassen sich immer mindestens durch 2 teilen, sind also niemals teilerfremd.
c) Gegenbeispiel: $\text{ggT}(9, 15) = 3$ Die Behauptung ist falsch.
d) Gegenbeispiel: $\text{ggT}(21, 7) = 7$ Die Behauptung ist falsch. Der größte gemeinsame Teiler einer Primzahl und eines Vielfachen der Primzahl ist immer die Primzahl selbst.
e) z.B. $\text{kgV}(9, 20) = 180 = 9 \cdot 20$; $\text{kgV}(16, 45) = 720 = 16 \cdot 45$